

# La modulation de fréquence expliquée

Frédéric Loyer

frederic.loyer@club-internet.fr

4 octobre 2020

## 1 Introduction

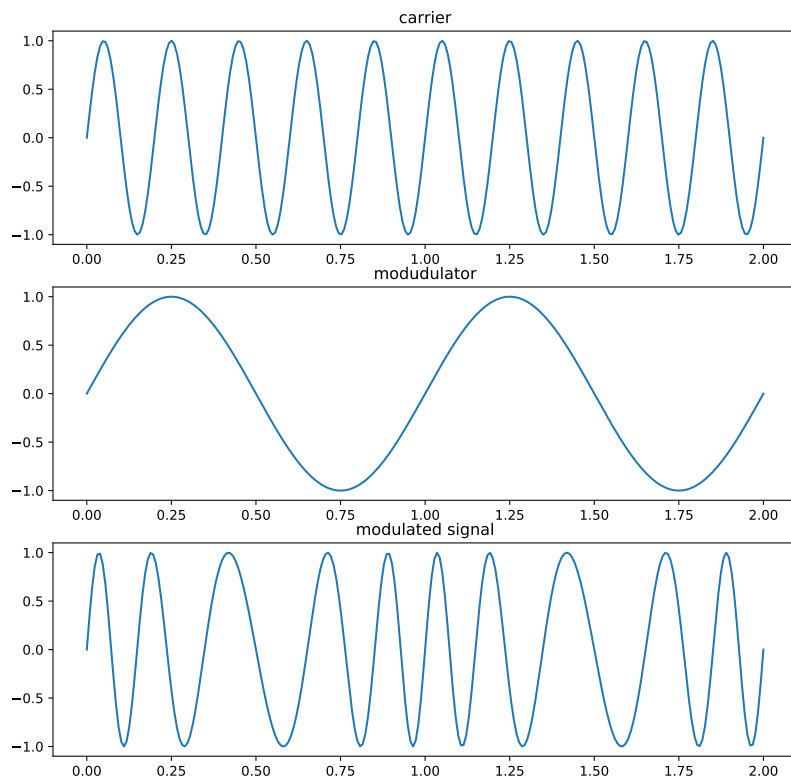
La synthèse par modulation de fréquence était rendue disponible assez tôt par des synthétiseurs modulaires où les oscillateurs contrôlés par tension (VCO, voltage control oscillator) peuvent être contrôlés par d'autres oscillateurs. En 1967, John Chowning a développé davantage le concept en permettant un contrôle de l'évolution temporelle du spectre sonore. Ce type de synthèse a été popularisé par Yamaha en 1983 avec le DX7, un synthétiseur numérique qui utilise ce type de synthèse. C'est maintenant une synthèse communément disponible sur certains synthétiseurs, comme le Montage de Yamaha. Nous verrons que cette synthèse peut générer de multiples harmoniques avec peu d'opérateurs et est assez flexible (un niveau de sortie par opérateur).

L'idée principale est de prendre deux signaux : une porteuse et un modulateur. Le signal porteur ressort avec un décalage temporel<sup>1</sup> proportionnel au signal de modulation.

L'exemple suivant montre une porteuse, un modulateur et le signal modulé. Nous pouvons voir que lorsque la pente du modulateur est vers le haut, le décalage de phase croissant rend la fréquence plus haute, et quand la pente est vers le bas, le décalage de phase décroissant rend la fréquence plus basse.

---

1. La modulation décrite est en réalité une modulation de phase, mais le terme modulation de fréquence est utilisé plus fréquemment par abus de langage.



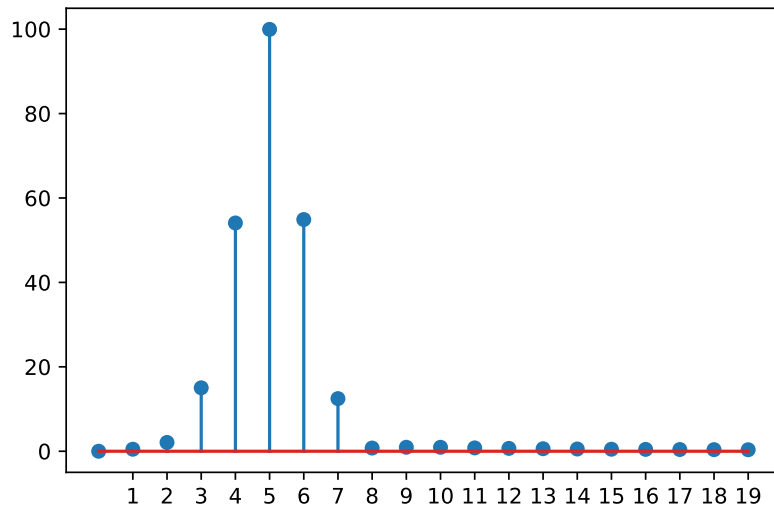
Cependant, quand nous analysons un son produit par modulation de fréquence, la meilleure manière est d'analyser les harmoniques produites, puisque l'oreille le décompose ainsi.

## 2 Les harmoniques produites par modulation de fréquence : 2 opérateurs

Prenons un cas simple : une fonction sinus modulée par une autre fonction sinus. Jouons une note à la fréquence  $f$ , utilisons une fréquence de porteuse  $f_p = 5 \times f$  et une fréquence de modulateur  $f_m = 1 \times f$ . Sur un DX7 ou un Montage, cela utilise typiquement un algorithme représentant une pile avec la porteuse en bas (1), modulé par un opérateur juste au dessus (2) :



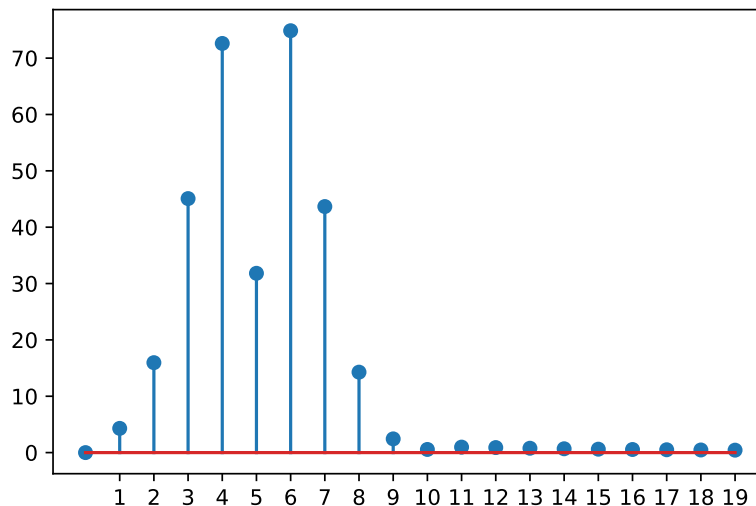
Les harmoniques produites sont représentées par les graphes suivants. (Sur l'axe des abscisses, le rang de l'harmonique, soit encore la fréquence de l'harmonique divisée par la fréquence de la note).



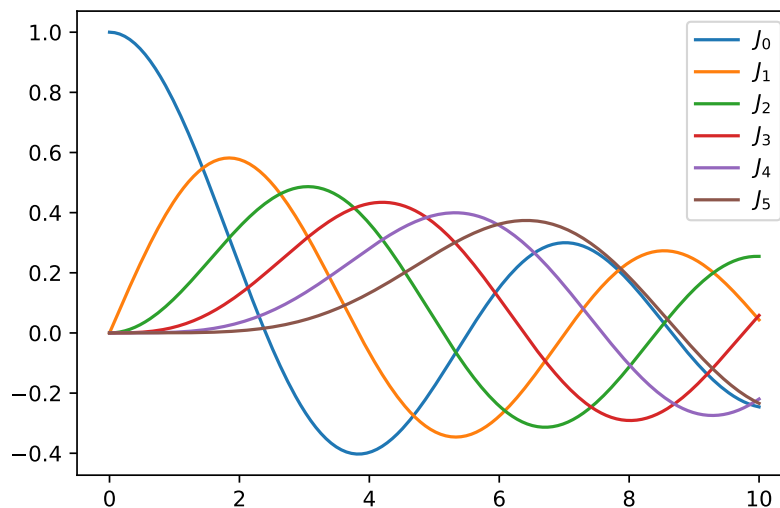
Nous pouvons voir un signal où l'harmonique principale est à la fréquence de porteuse et d'autres harmoniques placées à des distances multiples de la fréquence de modulation. Ainsi, les fréquences sont  $f_n = f_p + n \times f_m$  où  $n$  peut être négatif.

Augmentons le niveau de sortie du modulateur, nous avons maintenant un spectre

plus large :



Nous voyons aussi que l'harmonique du centre est réduite. En fait, les amplitudes des différentes harmoniques sont données par les fonctions de Bessel ( $J_n$ ) qui sont représentées par les courbes :

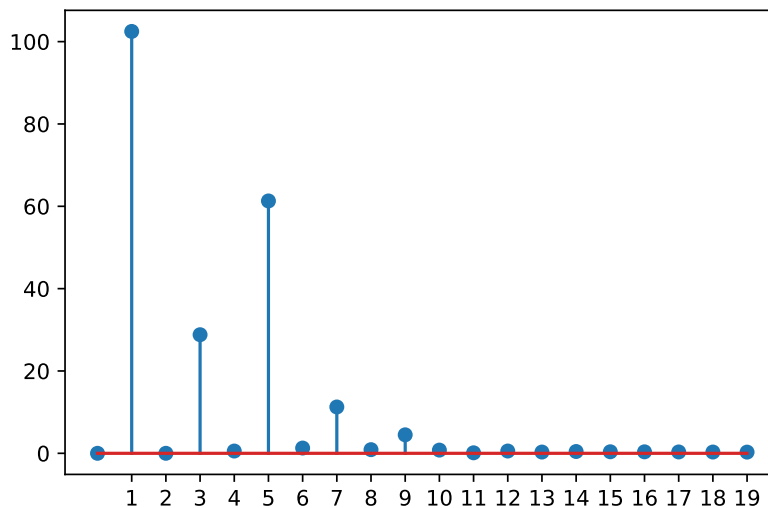


Sur l'axes des abscisses, nous avons l'indice de modulation qui est en rapport avec le niveau de sortie du modulateur. Les différentes courbes donnent les différentes amplitudes. Ainsi, une fréquence  $f_n = f_p + n \times f_m$  sera associée à une amplitude égale à  $J_n(\beta)$  où  $\beta$  est l'indice de modulation. Notons que  $\beta$  est relié au niveau de sortie : plus le niveau est élevé, plus l'indice de modulation l'est aussi, mais ils ne sont pas égaux. Nous avons typiquement une courbe exponentielle propre à chaque

synthétiseur<sup>2</sup> qui permet d'atteindre des indices de modulation élevés (13,12 sur un DX7) et une bonne résolution sur des indices de modulations faibles (utilisés pour corriger le timbre d'un son).

Nous pouvons voir que tous les  $J_n(0)$  sont nuls excepté  $J_0(0) = 1$ . C'est logique : si le modulateur est nul, l'harmonique de la porteuse sera inchangée. Quand  $\beta$  augmente, nous avons de plus en plus d'harmoniques, mais les courbes de Bessel oscillent, ainsi nous pouvons avoir un spectre avec de faibles harmoniques d'une façon difficile à prévoir. Ce sont les joies de la modulation de fréquence! De façon approchée, pour un indice de modulation  $\beta$ , les  $J_n(\beta)$  commencent à être faibles pour  $n$  au delà de  $\beta$ . Les harmoniques produites ont donc des fréquences comprises entre  $f_p - \beta \times f_m$  et  $f_p + \beta \times f_m$ .

Maintenant, essayons la modulation d'une porteuse à une fréquence  $f_p = 1 \times f$  par un modulateur à  $f_m = 2 \times f$ .



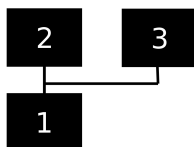
Comme toutes les harmoniques sont à une fréquence  $f_n = f_p + n \times f_m = (1+2n)f$ , toutes les harmoniques sont impaires. Cette propriété est intéressante puisque la clarinette et les autres instruments à anche (et à perce cylindrique) ont de faibles harmoniques paires. Cela ne signifie pas que l'on imitera précisément une clarinette avec seulement deux opérateurs, mais pour y arriver, il faut utiliser des porteuses impaires et de modulateurs pairs.

Avec une telle configuration, si  $n$  est négatif, l'harmonique n'est pas perdue : nous prenons la valeur absolue de la fréquence pour obtenir la bonne fréquence. Si deux harmoniques ont la même fréquence, les amplitudes sont additionnées, mais des inversions de phases peuvent nécessiter d'additionner des valeurs positives et négatives ce qui revient à une soustraction.

2. La relation pour un DX7 est  $\beta = \pi \times 2 \frac{33}{16} - \frac{99 \text{-level}}{8}$ .

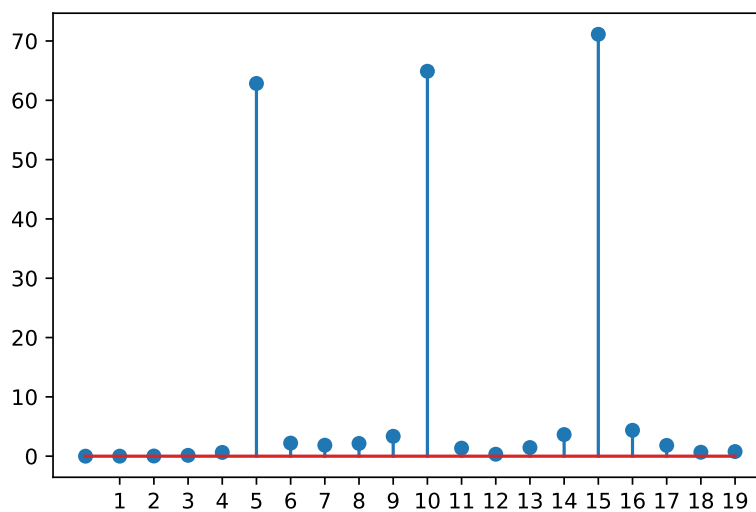
### 3 Ajoutons un modulateur

Sur un DX7 ou un Montage, nous pouvons empiler des opérateurs, mais pouvons aussi additionner les signaux des opérateurs. Les opérateurs additionnés sont placés sur un même niveau. Ainsi, l'algorithme suivant a deux opérateurs — 2 et 3 — qui sont additionnés. Le résultat module un troisième opérateur, 1.

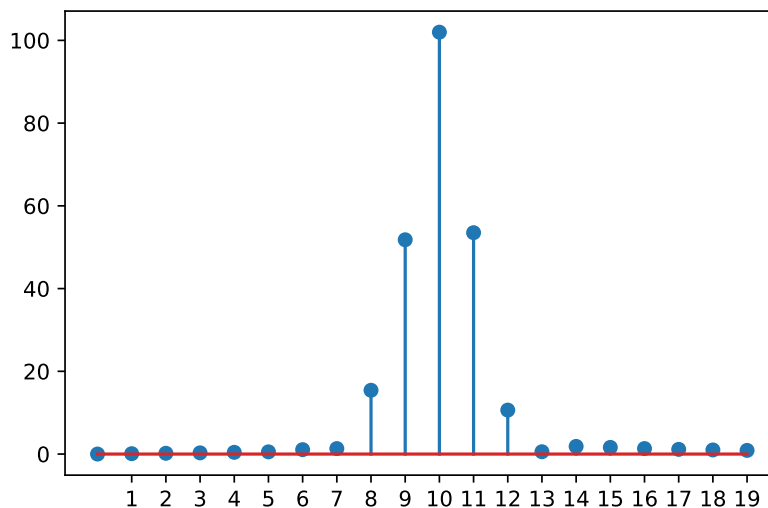


Prenons une porteuse (opérateur 1) avec une fréquence  $10f$ , un modulateur (opérateur 2) avec une fréquence  $5f$  et un second modulateur (opérateur 3) avec une fréquence  $1f$ . L'indice de modulation de ce dernier sera faible pour éviter trop d'harmoniques.

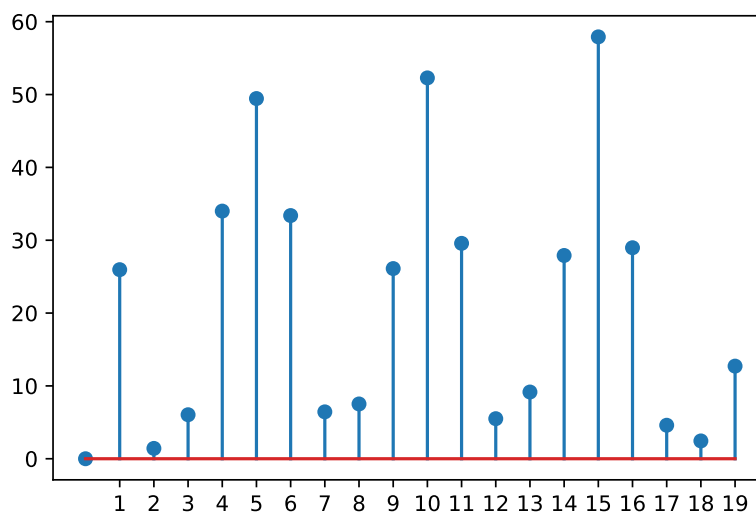
Avec seulement les opérateurs 1 et 2, nous avons le spectre :



Avec seulement les opérateurs 1 et 3, nous avons le spectre :



Et avec les trois opérateurs, nous obtenons le spectre suivant :



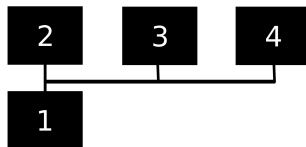
Nous pouvons voir que chaque harmonique du premier spectre est remplacée par le motif du second spectre.

La porteuse (opérateur 1) à  $10f$  est modulée par l'opérateur 2 ( $5f$ ) ce qui donne les harmoniques  $(10 - 5)f$ ,  $10f$ ,  $(10 + 5)f$ . Chacune de ces harmoniques est modulée à son tour par l'opérateur 3. Par exemple, l'harmonique à la fréquence  $(10 - 5)f$  génère les harmoniques  $(10 - 5 - 1)f$ ,  $(10 - 5)f$ ,  $(10 - 5 + 1)f$ .

Résumons. La porteuse est modulée deux fois. Avec un faible indice de modulation, chaque modulation multiplie par 3 le nombre d'harmoniques et nous avons

grossièrement  $3 \times 3 = 9$  harmoniques. Avec des indices de modulation plus élevés, nous pouvons vite avoir un nombre d'harmoniques important. Cependant, nous avons souvent de petits facteurs de fréquence : beaucoup d'harmoniques générées coïncident et leur amplitudes s'ajoutent.

Nous pouvons aller plus loin avec 3 modulateurs et une porteuse :



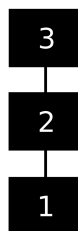
Ici, même si les modulateurs ne créent que 3 harmoniques (avec un faible indice de modulation), le nombre d'harmoniques est multiplié à chaque modulation ce qui donne  $3 \times 3 \times 3 = 27$  harmoniques.

Cela devient vite complexe, ce que explique que le DX7 ne propose que deux algorithmes avec 3 modulateurs sur une porteuse.

Pourquoi générer 27 harmoniques alors que la plupart se superposeront? Une façon de répondre est qu'avec des modulateurs  $1 \times f$ ,  $2 \times f$  et  $3 \times f$ , et un indice de modulation  $\beta$  faible ( $\approx 1$ ), on générera les harmoniques  $f_c + 1 \times (-1/0/1)f + 2 \times (-1/0/1)f + 3 \times (-1/0/1)f$ . Si on développe,  $f_c + 0 \times f$  sera présent 3 fois,  $f_c + 1 \times f$  sera présent 3 fois,  $f_c + 2 \times f$  sera présent 2 fois,  $f_c + 3 \times f$  sera présent 2 fois,  $f_c + 4 \times f$  sera présent 2 fois,  $f_c + 5 \times f$  sera présent 1 fois,  $f_c + 6 \times f$  sera présent 1 fois et  $f_c + 7 \times f$  sera présent 1 fois. Ainsi, le spectre sera décroissant de façon assez douce comparée à la décroissance des  $J_n(\beta)$  pour un indice de modulation  $\beta$  donné.

## 4 Empilons les modulateurs

Maintenant, utilisons un opérateur 3 pour moduler un opérateur 2. Ce dernier module un opérateur 1 (porteuse) :

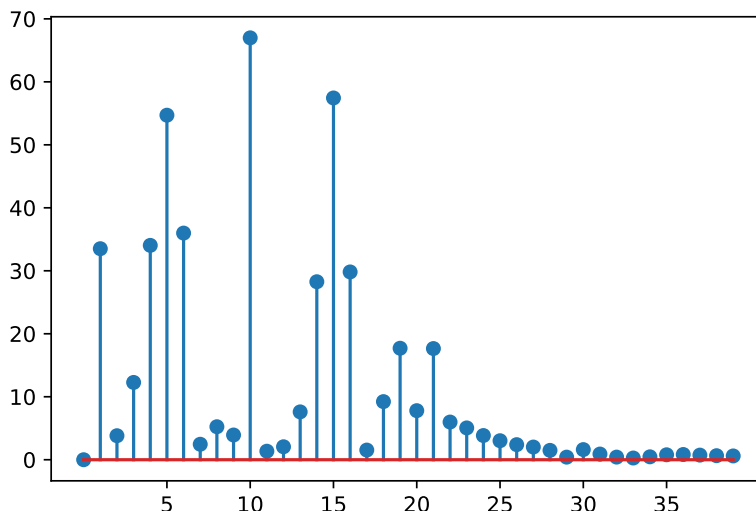


Nous pouvons appliquer ce qui précède aux opérateurs 3 et 2. Le résultat est un ensemble d'harmoniques. Maintenant imaginons que chaque harmonique agit comme un unique opérateur comme dans la section précédente... Alors nous pouvons anticiper une combinatoire énorme des harmoniques!

Nous pouvons voir la situation sous un autre angle : la porteuse est modulée par l'opérateur 2 (comme dans le cas avec deux opérateurs), puis chaque harmonique



l'est à son tour par l'opérateur 3, mais avec un indice de modulation proportionnel au rang de l'harmonique<sup>3</sup>. Plus ce rang  $n$  est grand, plus l'harmonique sera modulée et générera une part de spectre étendue. Cela peut être illustré par le spectre suivant ( $f_1 = 10 \times f$ ,  $f_2 = 5 \times f$ ,  $f_3 = 1 \times f$ ).



Nous remarquons que la porteuse ( $n = 0$ ,  $f_0 = 10 \times f$ ) n'est pas modulée. Ensuite l'harmonique suivante ( $n = 1$ ,  $f_1 = 15 \times f$ ) est modulée avec l'indice  $\beta_3$ , enfin une troisième harmonique ( $n = 2$ ,  $f_2 = 20 \times f$ ) est modulée avec un indice double,  $2 \times \beta_3$ .

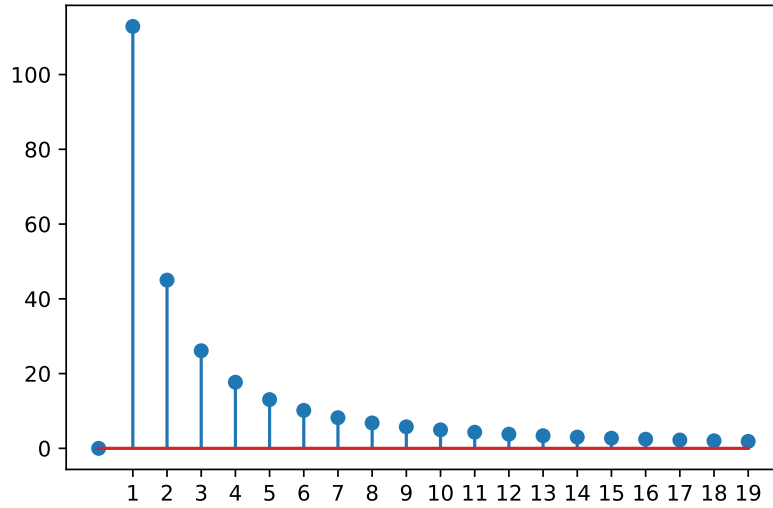
Nous pouvons considérer cette configuration comme très complexe, mais le DX7 va un cran plus loin et propose 4 opérateurs empilés dans 3 algorithmes. Le Montage propose même un algorithme où les 8 opérateurs sont empilés!

La rétroaction (feedback) est aussi proposée par le DX7 et le Montage lorsque la sortie d'un opérateur ou d'une pile reboucle et module un opérateur plus haut. Tout se passe comme s'il y avait une pile infinie avec ce ou ces opérateurs dupliqués. Cela ne peut pas être analysé simplement<sup>4</sup>.

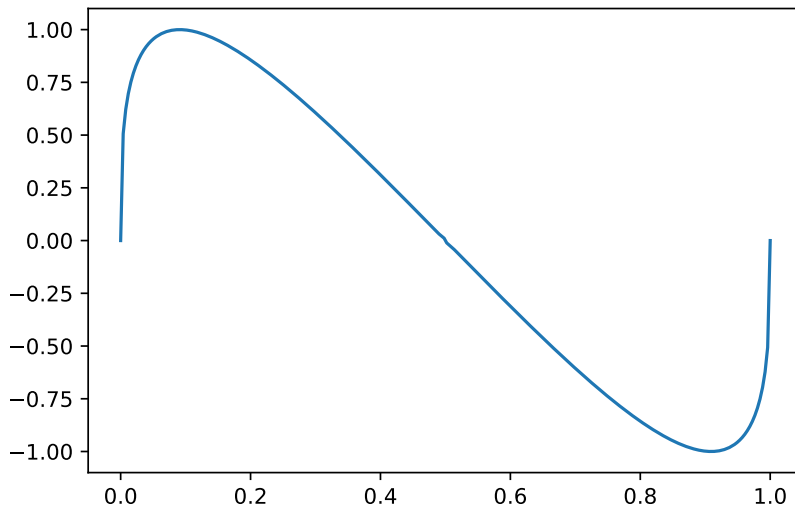
Le graphe suivant montre le spectre d'un unique opérateur avec rétroaction. Nous constatons que la décroissance est assez régulière.

3. Les harmoniques de fréquences  $f_1 + n \times f_2 + m \times f_3$  ont des amplitudes  $A_{n,m} = J_n(\beta_2) \times J_m(n\beta_3)$ .

4. On démontre cependant que pour un opérateur, les amplitudes des harmoniques aux fréquences  $n \times f$  sont données par la formule  $A_n = \frac{2J_n(n\beta)}{n\beta}$



Son graphe temporel est proche d'un signal en dent de scie proposé par la plupart des synthétiseurs analogiques :



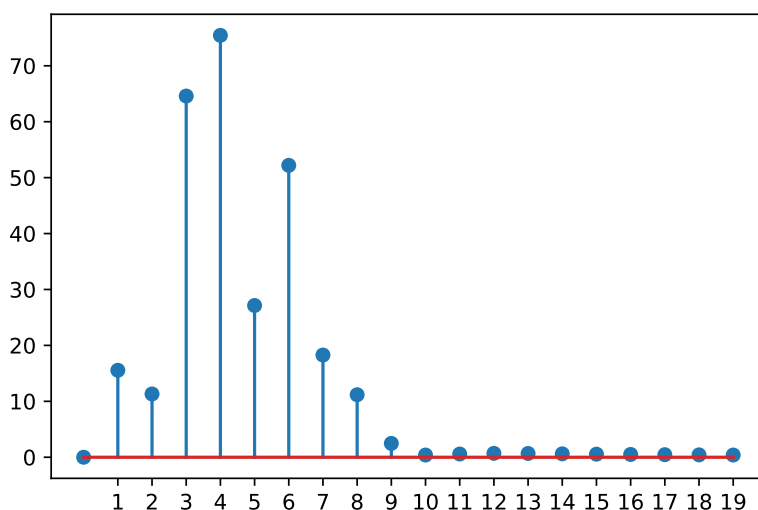
## 5 Quelques exemples

Nous avons vu les principes de base de la modulation de fréquence. Expérimentons ces principes.

Les exemples qui seront proposés sont disponibles avec les sons correspondant à l'URL suivante :

<http://www.sinerj.org/~loyer/FM>

**Exemple 1** Si nous cherchons un son avec des harmoniques jusqu'au rang 6, nous pouvons moduler une porteuse à la fréquence  $f_p = 1f$  avec un modulateur à la même fréquence,  $f_m = 1f$  et un indice de modulation  $\beta = 6$  (niveau de sortie 90 sur un DX7). Nous aurons un son avec une décroissance importante et des trous dans le spectre (à cause des oscillations des fonctions de Bessel et des inversions de phase évoquées plus haut).

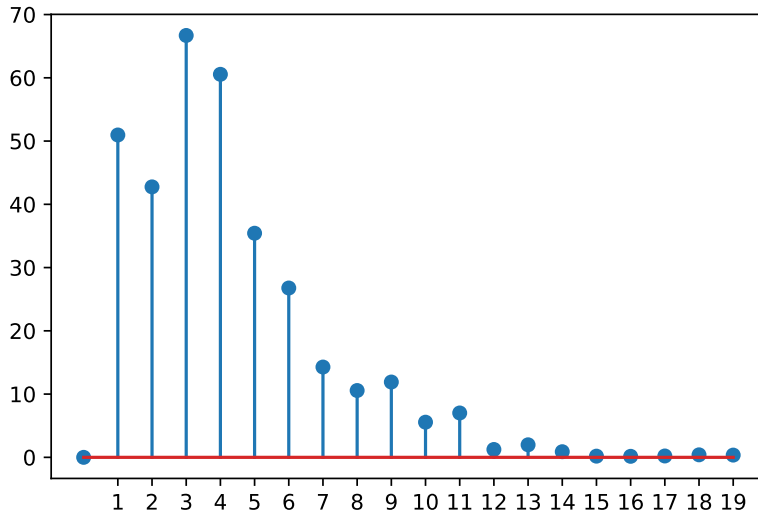


**Exemple 2** Si nous voulons un son plus « naturel », nous pouvons essayer de remplir les trous et obtenir une transition douce. Une manière de faire est d'utiliser des petits indices de modulation, proche de  $\beta \approx 1$  mais de multiples oscillateurs à des fréquences  $4f$ ,  $2f$ ,  $1f$ . Le modulateur à la fréquence  $4f$  générera des harmoniques de fréquences importantes, mais il y aura des trous. Les modulateurs aux fréquences plus faibles les rempliront.

Essayons les valeurs suivantes (les niveaux de sortie sont issus d'une table pour DX7) :

- modulateur 1 :  $4f$ ,  $\beta = 1$  (niveau=69)
- modulateur 2 :  $2f$ ,  $\beta = 0.6$  (niveau=63)
- modulateur 3 :  $1f$ ,  $\beta = 1.5$  (niveau=74)

Nous obtenons le spectre suivant qui est plus régulier :



**Exemple 3** Si nous voulons économiser un opérateur, une manière de faire est d'empiler 3 opérateurs. Les deux opérateurs du haut agiront comme de multiples (plus de 2) opérateurs additionnés. Et nous pouvons obtenir quelque chose de comparable à l'exemple précédent.

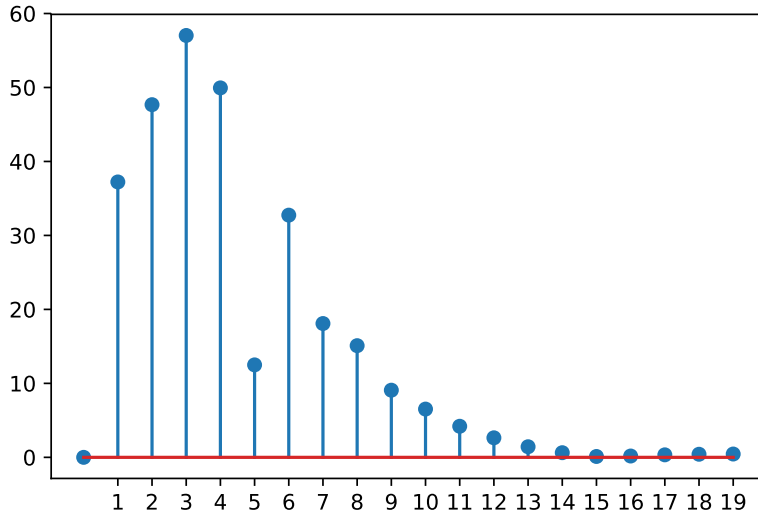
Avec la convention suivante :



Utilisons les valeurs suivantes :

- opérateur 1 :  $f_1 = 2f$
- opérateur 2 :  $f_2 = 1f, \beta_2 = 2$  (niveau 77)
- opérateur 3 :  $f_3 = 1f, \beta_3 = 2$  (niveau 77)

Nous avons maintenant le spectre suivant :



Le spectre décroît assez doucement, comme dans l'exemple précédent. Mais comme nous avons moins d'indices de modulation à régler, il peut être plus difficile de trouver des valeurs qui évitent un trou (comme la 5<sup>e</sup> harmonique ici). Les sons sont cependant assez proches.

## 6 Conclusion

Nous avons vu que la modulation de fréquence peut générer de multiples harmoniques avec peu d'opérateurs. Chaque opérateur a un niveau de sortie réglable. Sur les synthétiseurs FM modernes, le niveau de sortie effectif peut être modulé par plusieurs valeurs : l'*aftertouch*, une enveloppe, un oscillateur basse fréquence (LFO), ce qui améliore l'expressivité du synthétiseur.

Cependant, la manière selon laquelle les harmoniques des opérateurs sont combinées peut être complexe, ce qui rend la conception des sons FM pas évidente.